ЛА	Каспарян	07.01.13

Ортогонализация по метода Грам-Шмидт Т6.

Съществува процедура, която съпоставя на произволни ЛНЗ-ми вектори $a_1 - a_n$ от евклидово пространство V, ненулеви ортогонални вектори $b_1 - b_n$, така че $\ell(a_1 - a_i) = \ell(b_1 - b_i)$ за $1 \leq i \leq n$. Ако $a_1 - a_n$ са били ортогонални за някое $1 \leq k \leq n$, то $b_1 = a_1, b_2 = a_2 \dots b_k = a_k$

Док-во

Със индукция по $1 \leq i \leq n$ ще установим, че ако $a_1 - a_i \in V$ са ЛНЗ-ми то съществуват ненулеви ортогонални $b_1 - b_i$ с $\ell(a_1 - a_i) = \ell(b_1 - b_i)$ и ако $a_1 - a_i$ са ортогонални то $b_1 = a_1 \dots b_i = a_i$

За $i = 1$ задължително избираме $a_1 = b_1$.

В общият случай, ако $a_1 - a_i$ са ЛНЗ-ми, то и $a_1 - a_{i-1}$ са ЛНЗ-ми. По индукционно предположение съществуват ненулеви ортогонални помежду си $b_1 - b_{i-1}$ с $\ell(a_1 - a_{i-1}) = \ell(b_1 - b_{i-1})$ Търсим $b_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} b_j$, така че b_i да е ортогонален на $b_1 - b_{i-1}$. По-точно от $0 = (b_i, b_s) = \left(a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} b_j, b_s\right) = (a_i b_s + \lambda_{is}(b_s b_s))$ за $\forall 1 \leq s \leq i-1$ и $(b_s, b_s) \neq 0$ следва $\lambda_{is} = -\frac{(a_i b_s)}{(b_s b_s)} \in \mathbb{R}$. Векторите $b_1 - b_{i-1}, b_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{a_i b_j}{b_j b_j}\right) b_j$ образуват ортогонална система. Твърдим че $b_i \neq 0$, защото в противен случай $a_i = \sum_{j=1}^{i-1} (-\lambda_{ij}) b_j \in \ell(b_1 - b_{i-1}) = \ell(a_1 - a_{i-1})$ и $a_1 - a_i$ са ЛЗ-ми което е в противоречие

От $\ell(a_1 - a_{i-1}) = \ell(b_1 \dots b_{i-1})$ следва че $\ell(a_1 - a_i) = \ell(a_1 - a_{i-1}) + \ell(a_i) = \ell(b_1 \dots b_{i-1}) + \ell(b_i) = \ell(b_1 - b_{i-1}) + \ell(a_i) = \ell(b_1 \dots b_{i-1}, a_i)$ Твърдим че $\ell(b_1 - a_i) = \ell(b_1 - b_i)$, защото $a_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} b_j \in \ell(b_1 - b_i)$ и $b_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} b_j \in \ell(b_1 - b_{i-1}, a_i)$

Ако $a_1 - a_i$ са ортогонални, то $a_1 - a_{i-1}$ са ортогонални и по индукционно предположение $b_1 = a_1, b_2 = a_2 \dots b_{i-1} = a_{i-1}$. Търсим $b_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} b_j$, така че за $\forall 1 \leq s \leq i-1$ да е в сила $0 = (b_i, b_s) = (a_i, b_s) + \lambda_{is}(b_s b_s) = (a_i, a_s) + \lambda_{is}(a_s a_s) = \lambda_{is}(a_s a_s)$, понеже ортогоналните вектори $a_1 - a_i$

са ЛНЗ-ми $\forall a_s \neq \vec{0}$ и $(a_s a_s) > 0$. Следователно $\lambda_{is} = 0$ за $\forall 1 \leq s \leq i-1$ и $b_i = a_i$

Забележка

Нека $a_1 - a_{i-1}$ са ЛНЗ-ми вектори от евклидово пространство V, а вектори $a_i \in \mathcal{L}(a_1 - a_{i-1})$. Тогава ортогонализацията на $a_1 - a_i$ по метода на Грам-Шмидт дава ненулеви ортогонални $b_1 - b_{i-1}$ с $\mathcal{L}(b_1 - b_{i-1}) = \mathcal{L}(a_1 - a_{i-1})$ и $b_i = \vec{0}$. Наистина ако $b_i = a_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} b_j$ изчисляваме $0 = (b_i, b_s) = (a_i, b_s) + \lambda_{is}(b_s b_s) = (\sum_{t=1}^{i-1} \lambda_{it} b_t, b_s) + \lambda_{is}(b_s b_s) = \lambda_s(b_s b_s) + \lambda_{is}(b_s b_s) = (\lambda_s + \lambda_{is})(b_s b_s)$ за $\forall 1 \leq s \leq i-1$, тогава $\lambda_s + \lambda_{is} = 0$ за $\forall 1 \leq s \leq i-1$. Тогава $b_i = a_i + \sum_{s=1}^{i-1} \lambda_{is} b_s = \sum_{s=1}^{i-1} \lambda_s b_s + \sum_{s=1}^{i-1} \lambda_{is} b_s = \sum_{s=1}^{i-1} (\lambda_s + \lambda_{is}) b_s = 0$

Следствие

Нека V е n-мерно евклидово пространство, $e_1 - e_k \in V$ са ортогонални вектори. Тогава съществува ортонормиран базис $e_1 - e_k, e_{k+1}, \ldots e_n \in V$.

Док-во

Ортонормираните вектори $e_1 - e_k$ са ненулеви и ортогонални, откъдето и ЛНЗ-ми. Следователно $k \leq n$ и можем да допълним $e_1 - e_k$ до базис $e_1 \ldots e_n \in V$. Прилагаме ортогонализацията по метода на Грам-Шмидт и получаваме ненулеви ортогонални вектори $e_1 - e_k, v_{k+1} - v_n$ с $\mathcal{L}(e_1 - v_n) = \mathcal{L}(e_1 - v_n) = V$. Заменяме v_i с $\frac{v_i}{\|v_i\|} = e_i$ за $\forall k+1 \leq i \leq n$ и получаваме ортонормиран базис $e_1 - e_n \in V$

Матрица на Грам. Неравенство на Коши-Буняковски. Неравенство на триъгълника. Ортогонално допълнение към подпространство

Определение

Ако $a_1 - a_n$ са вектори от евклидово пространство V, то матрицата $G(a_1 - a_n) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ с елементи

$G(a_1 \dots a_n)_{ij} = (a_i a_j)$ се нарича матрица на Грам на $a_1 \dots a_n$.

$\Gamma(a_1 a_n) \overset{def}{=} \det(G(a_1 a_n))$ се нарича детерминанта на Грам на тези вектори $a_1 \dots a_n$. Подпространството $V_0 = \mathcal{L}(a_1 \dots a_n)$ на V е крайномерно. Избираме ортонормиран базис $v = (v_1 \dots v_k) \in V_0$ $k \leq n$ и образуваме матрицата $A = (A_1 \dots A_n) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ съдържаща по стълбове A_i координатите на a_i спрямо базиса v. Тогава $a = (a_1 \dots a_n) = (v_1 \dots v_k)\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{pmatrix} = vA$. Следователно

$$A^t A = \begin{pmatrix} A_1^t \\ \vdots \\ A_i^t \end{pmatrix}(A_1 \dots A_n) = \left(A_i^t A_j\right) = \left((a_i a_j)\right) = G(a_1 a_n)$$

$a = (a_1 \dots a_n)$

Нека $b = (b_1 \dots b_n)$ се получават чрез ортогонализация по метода на Грам-Шмидт. Тогава съществува матрица $T \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, така че $b = (b_1 \dots b_n) = (a_1 \dots a_n)(T) = (a_1 \dots a_n)\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * \end{pmatrix} = aT$

$\left(b_2 = a_2 + \lambda_{21} a_2\right); \left(b_i = a_i + \lambda_{ij} a_j\right) = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{ij} a_j + a_i$ ✓

Ако матрицата $B = (B_1 \dots B_n)$ е образувана по стълбове от координатите на $b_1 \dots b_n$ спрямо базис $v_1 \dots v_k$ то $b = vB$. Следователно $vB = b = aT = (vA)T = v(AT)$. Следователно в резултат $v(B - AT) = (\vec{0} \dots \vec{0})$ и $B = AT$ съгласно ЛНЗ-тост на $v_1 \dots v_k$. Оттук матрицата на Грам $G(b_1 \dots b_n) = B^t B = (AT)^t AT = T^t (A^t A) T = T^t G(a_1 \dots a_n) T$

детерминантите на Грам $\Gamma(b_1 \dots b_n) = \det G(b_1 \dots b_n) = (\det T)^2 \det G(a_1 \dots a_n) = (\det T)^2 \Gamma(a_1 \dots a_n)$. Но $\det T = \det\begin{pmatrix} 1 & * \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ така че $\Gamma(b_1 \dots b_n) = \Gamma(a_1 \dots a_n)$

Забелязваме че $\Gamma(b_1 \dots b_n) = \begin{vmatrix} (b_1 b_1) & (b_2 b_2) & \dots & (b_2 b_n) \\ \vdots & & & \\ (b_n b_1) & & \dots & (b_n b_n) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} \|b_1\|^2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \|b_n\|^2 \end{vmatrix} = \|b_1\|^2 \dots \|b_n\|^2 > 0$ с $\Gamma(b_1 \dots b_n) =$

$= (\|b_1\| \dots \|b_n\|)^2 = 0 \iff \exists\, b_i = \vec{0} \iff$

$a_1 \dots a_{i-1}$ ЛНЗ-ми и $a_i = \mathcal{L}(a_1 \dots a_{i-1})$ и $a_1 \dots a_i$ ЛЗ-ми

Тв1

За произволни вектори $a_1 - a_n$ от евклидово пространство V е в сила $\Gamma(a_1 - a_n) \geq 0$ и $\Gamma(a_1 - a_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 - a_n$ са ЛЗ-ми

Тв2

Неравенство на Коши - Буняковски

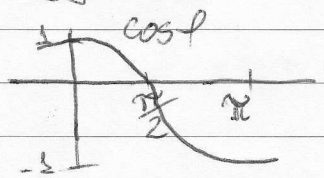
За $\forall a, b \in V$ е в сила $|(a,b)| \leq \|a\|\|b\|$ с равенство $|(a,b)| = \|a\|\|b\| \Leftrightarrow a$ и b са колинеарни, т.е. някой от векторите a и b е $\vec{0}$ или $b = \lambda a$ за $\lambda \in \mathbb{R}$

Док-во

Ако $a = \vec{0}$ то $|(\vec{0}, b)| = \|\vec{0}\|\|b\| = 0$ е в сила с равенство и $a = \vec{0}, b$ са колинеарни. От сега нататък $a \neq \vec{0}$ и $b \neq \vec{0}$. Тогава $\Gamma(a,b) = \begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{vmatrix} = \|a\|^2\|b\|^2 - (a,b)^2 \geq 0$ с $\|a\|^2\|b\|^2 = (ab)^2 \Leftrightarrow$ a и b са ЛЗ-ми $\Leftrightarrow a$ и b са колинеарни

Ако $X, Y \in \mathbb{R}$, $X > 0$, $Y > 0$, то $X^2 \geq Y^2 \Leftrightarrow X \geq Y$ с $X^2 = Y^2 \Leftrightarrow X = Y$. Тогава следва $X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$ с $X + Y > 0$. Прилагаме този факт като $X = \|a\|\|b\| > 0$ и $Y = |(a,b)| \geq 0$ и получаваме че $\|a\|\|b\| \geq |(a,b)|$ с $\|a\|\|b\| = |(a,b)| \Leftrightarrow a$ и b са колинеарни. В резултат за произволни ненулеви a и $b \in V / \{\vec{0}\} \Rightarrow -1 \leq \frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|} \leq 1$

Въвеждаме ъгъла $\varphi \in [0, \pi]$ между a и b чрез условието $\varphi = \arccos \frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|}$



Тв3 Неравенство на триъгълника

За произволни вектори $a, b \in V$ е в сила $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ с равенство на двете страни $\Leftrightarrow a$ и b са едноосочно колинеарни, т.е. някой от векторите a или b е $\vec{0}$ или $b = \lambda a$ за $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$

Док-во

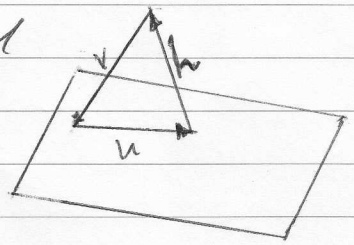
Ако $a = 0$ то $\|a+b\| = \|b\| = \|a = \vec{0}\| + \|b\|$ е в

Сила равенство $\Leftrightarrow$ a и b са едноглосочно колинеарни. Отгука нататъка $a \neq \vec{0}$ и $b \neq \vec{0}$
Разглеждаме $\|a+b\|^2 = (a+b, a+b) = \|a\|^2 + 2(a,b) + \|b\|^2$
По неравенство на Коши-Буняковски $(a,b) \leq \|a\|\|b\|$ с равенство $(a,b) = \|a\|\|b\| \Leftrightarrow a$ и b са едноглосочно колинеарни. Сега $\|a+b\|^2 \leq \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2 \Leftrightarrow a$ и b са едноглосочно колинеарни. Извличаме неотрицателен корен квадратен взимайки първото че $X = \|a\| + \|b\| > 0$, $Y = \|a+b\| \geq 0$. Получаваме $X \geq Y$ или $\|a\| + \|b\| \geq \|a+b\|$ с равенство $\|a\|+\|b\| = \|a+b\| \Leftrightarrow (\|a\|+\|b\|)^2 = \|a+b\|^2 \Leftrightarrow a$ и b са едноглосочно колинеарни. От неравенството на триъгълника за $a-b$ и b следва че $\|a\| = \|(a-b)+b\| \leq \|a-b\| + \|b\| \Rightarrow$

Следствие
За произволни вектори a и b от евклидово пространство V е в сила $\|a-b\| \geq \|a\| - \|b\|$
$a-b = \lambda b$ $\lambda \in \mathbb{R} > 0$ или $b = \vec{0}$ или $a = b$

Опр
Нека V е евклидово пространство, U е подпространство на V. Тогава множеството $U^{\perp} = \{v \in V / (u,v) = 0$ за $\forall u \in U\}$ се нарича ортогонално допълнение на U във V
Твърдим че ортогоналното допълнение е подпространство на V, защото за произволни $v_1, v_2 \in U^{\perp}$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ имаме $(u, v_1+v_2) = (u,v_1) + (u,v_2) = 0+0=0$ за $\forall u \in U^{\perp}$ и $(u, \lambda v_1) = \lambda(u,v_1) = \lambda 0 = 0$ за $\forall u \in U^{\perp}$ и $\Rightarrow v_1+v_2, \lambda v_1 \in U^{\perp}$
$\overline{\text{Тв.}}$
Нека V е <u>крайномерно</u> евклидово пространство U е подпространство на V, $U^{\perp}$ е ортогоналното допълнение на U във V. Тогава:
(i) $V = U \oplus U^{\perp}$
(ii) $\forall v \in V$ има единствено представяне $v = u + h$ с $u \in U$ и $h \in U^{\perp}$. Векторът u се нарича ортогонална проекция на V върху U а h е

перпендикулярът на V към U



(iii) $(U^\perp)^\perp = U$

Док-во

Избираме ортонормиран базис $e_1 - e_k$ на U. Допълваме до ортонормиран базис $e_1 - e_k - e_n$ на V. Тогава $V = L(e_1 - e_k) + L(e_{k+1} .. e_n) = U + L(e_{k+1} - e_n)$

Търсим $L(e_{k+1} - e_n) = U^\perp$

за $\forall v = \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i \in L(e_{k+1}, .. e_n)$ и $u = \sum_{I=1}^{k} \lambda_I e_I \in L(e_1 - e_k)$

е в сила $(u, v) = (\sum_{I=1}^{k} \lambda_I e_I, \sum_{i=k+1}^{n} x_i e_i) =$

$= \sum_{I=1}^{k} \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_I x_i (e_I e_i) = 0$ тъй като $\forall I \le k < k+1 \le i$ и $e_1 .. e_n$ е ортонормиран базис. Следователно $v \in U^\perp$ и $L(e_{k+1} .. e_n) \subseteq U^\perp$

Ако $w = \sum_{s=1}^{n} x_s e_s \in U^\perp \subseteq V$, то $\forall 1 \le i \le k$ имаме $e_i \in U$ така че $0 = (e_i, w) = (e_i \sum_{s=1}^{n} x_s e_s) = \sum_{s=1}^{n} x_s (e_i e_s) = x_i$ защото $(e_i e_s) = 0$ за $s \neq i$ и $(e_i, e_i) = 1 \Rightarrow$

$w \in \sum_{s=k+1}^{n} x_s e_s \in L(e_{k+1} .. e_n)$ откъдето $U^\perp \subseteq L(e_{k+1} .. e_n)$ и $U^\perp = L(e_{k+1} - e_n)$

(ii) е директно следствие от определението за директна сума (i)

(iii) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ защото за $\forall u \in U, \forall v \in U^\perp$ знаем че $(v, u) = (u, v) = 0$. Следователно $u \in (U^\perp)^\perp$.

От $V = U \oplus U^\perp = U + \oplus (U^\perp)^\perp \Rightarrow \dim U + \dim U^\perp = \dim V = \dim U^\perp + \dim (U^\perp)^\perp \Rightarrow \dim U = \dim V - \dim U^\perp = \dim (U^\perp)^\perp$ и $U = (U^\perp)^\perp$

Ортогонални матрици и оператори. Изоморфизъм на евклидово пространство

Деф

Матрицата $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ е ортогонална, ако $AA^t = E_n$. Еквивалентно $A^t A = E_n$ Вектор редовете на A образуват координатите на n ортонормирани вектора, относно ортонормиран базис на $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow A$ е обратима и $A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^t A = E_n \Leftrightarrow$ Вектор стълбовете на са координати на ортонормирана система

Векторите спрямо ортонормиран базис $\Leftrightarrow$ A е матрица на прехода от ортонормиран базис към ортонормиран базис

$A = \begin{matrix} e_1 \\ e_n \end{matrix}\begin{pmatrix} | & & | \\ f_1 & \dots & f_n \\ | & & | \end{pmatrix}$; $i = (A_1 \dots A_n)\begin{pmatrix} A_{I1} \\ \vdots \\ A_{In} \end{pmatrix} = i\left(\delta_{ij} = \sum_{s=1}^{n} A_{is}A_{js}\right)$

$\sum_{s=1}^{n} A_{is}A_{Is} = \left(\sum_{s=1}^{n} A_{is}e_s, \sum_{t=1}^{n} A_{It}e_t\right)$ = спрямо ортонормирана базис $e_1 \dots e_n$

Ако A е ортогонална матрица то $\det A = \pm 1$ тъй като $AA^t = E_n$ следва че $1 = \det(E_n) = \det(AA^t) = \det(A)^2$

Линейният оператор φ в евклидово пространство V е ортогонален ако за $\forall u \in V$ е в сила $(u,v) = (\varphi(u), \varphi(v))$

Теорема

Линейният оператор φ в евклидово пространство V е ортогонален, точно когато запазва ъглите между векторите и ъглите между тях

Док-во $\rightarrow$

Ако φ е ортогонален то за $\forall u \in V \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(u)) = (u,u) \Rightarrow \|\varphi(u)\| = \|u\|$. За $u, v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ определяме $\angle\alpha$ между тях да е $\alpha \in [0;\pi]$ с $\cos\alpha = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$ следователно $(u,v) = \|u\|\|v\|\cos\alpha$. Ако $\beta \in [0;\pi]$ е ъгълът м/у $\varphi(u)$ и $\varphi(v)$ то $\|u\|\|v\|\cos\beta = \|u\|\|v\|\cos\alpha$ откъдето $\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

$\leftarrow$ Ако φ запазва ъглите между тях то при $(u,v) = \|u\|\|v\|\cos\alpha$ имаме $(\varphi(u), \varphi(v)) = \|\varphi(u)\|\|\varphi(v)\|\cos\beta = \|u\|\|v\|\cos\alpha = (u,v)$ и φ е ортогонален. Остана разгледаме за $u \neq \vec{0}$ и $v \neq \vec{0}$. Знаем че $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ т.е. $(\vec{0}, v) = 0 = (\vec{0}, \varphi(v)) = (\varphi(\vec{0}), \varphi(v))$